โรงเรียนสตรีนนทบุรี

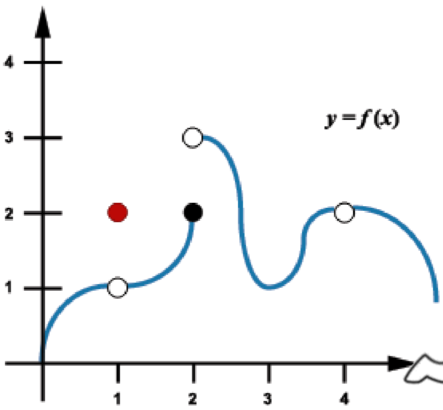
วิชาคณิตศาสตร์ (ค30205/ค33291)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา ....

เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น 1 ลิมิตและความต่อเนื่อง

(Basic Calculus- Integration)



ชื่อ .... ชั้น .... เลขที่ ....

ครูผู้สอน นายพิบูลย์ ชมสมบัติ

โรงเรียนสตรีนนทบุรี 120 ถนนพิบูลสงคราม ตำบลสวนใหญ่ อำเภอเมือง จังหวัดนนทบุรี
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 3

สารบัญ

ใบความรู้ที่ 1
เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน

โดยทั่วไป สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง ถ้าค่าของ f(x) เข้าใกล้จำนวนจริง L เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a เรียก L ว่า ลิมิตของ f ที่ a และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

แต่ถ้าไม่มีจำนวนจริง L ซึ่ง f(x) เข้าใกล้ L เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a แล้ว จะกล่าวว่า f ไม่มีลิมิตที่ a และเขียนแทนว่า $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้

นอกจากนี้ สัญลักษณ์ $\lim_{x \to a} f(x) = L$ อาจแทนด้วย $f(x) \to L$ เมื่อ $x \to a$

ซึ่งอ่านว่า “f(x) เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a”

ในการหาค่าของฟังก์ชัน f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a นั้น เราจะพิจารณาค่าของฟังก์ชัน f(x) ว่า เข้าใกล้จำนวนจริงค่าใดในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a แต่ $x \neq a$ นั่นหมายความว่า เราจะไม่พิจารณาค่าของฟังก์ชัน f(x) ที่ x = a ดังนั้น ฟังก์ชัน f อาจจะนิยามหรือไม่นิยามที่ x = a ก็ได้ อย่างไรก็ตาม ฟังก์ชัน f จะต้องนิยามที่แต่ละจุดที่ใกล้ a

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ โดยการสร้างตารางแสดงค่าของฟังก์ชัน

วิธีทำ สังเกตว่า ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ ไม่นิยามที่ x = 1

อย่างไรก็ตาม การหา $\lim_{x \to 1} f(x)$ เราจะพิจารณาค่าของ f(x)

เมื่อ x เข้าใกล้ 1 แต่ $x \neq 1$ เท่านั้น

ตารางแสดงค่าของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 1 แต่ $x \neq 1$

x<1	f(x)
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

x>1	f(x)
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

จากตารางจะเห็นว่า f(x) เข้าใกล้ 0.5 เมื่อ x เข้าใกล้ 1

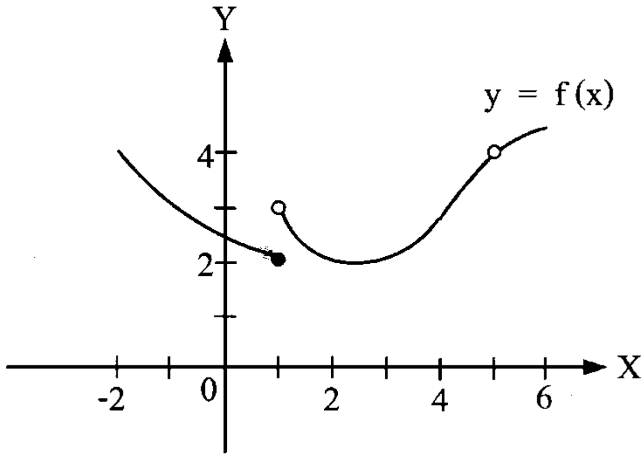
ดังนั้น $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$

โดยทั่วไป สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง

ถ้าค่าของ f(x) เข้าใกล้จำนวนจริง L_1 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย เรียก L_1 ว่า ลิมิตซ้ายของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$

ถ้าค่าของ f(x) เข้าใกล้จำนวนจริง L_2 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางด้านขวา เรียก L_2 ว่า ลิมิตขวาของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดกราฟของฟังก์ชัน y = f(x) ให้ดังแสดงในรูป



จงหา

(1) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (2) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ (3) $\lim_{x \to 1} f(x)$

(4) $\lim_{x \to 5} f(x)$ (5) f(5)

วิธีทำ พิจารณา กราฟของ y = f(x) ที่กำหนดให้

(1) เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้าย (x<1) จะได้ว่าค่าของ f(x) เข้าใกล้ 2

ดังนั้น $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

(2) เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางขวา (x>1) จะได้ว่าค่าของ f(x) เข้าใกล้ 3

ดังนั้น $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$

(3) เนื่องจาก $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x \to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้

(4) เนื่องจาก $\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^+} f(x) = 4$

ดังนั้น $\lim_{x \to 5} f(x) = 4$

(5) f(5) ไม่นิยาม

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน สามารถหาได้โดยการคำนวณค่าของฟังก์ชันหรือการเขียนกราฟของฟังก์ชัน อย่างไรก็ตามเราสามารถใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต หาค่าลิมิตของฟังก์ชันได้

ทฤษฎีบท 1 เมื่อ a, L และ M เป็นจำนวนจริงใด ๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = M$ แล้ว

1. $\lim_{x \to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
2. $\lim_{x \to a} x = a$
3. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$, $n \in I^+$
4. $\lim_{x \to a} c f(x) = c \lim_{x \to a} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
5. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M$
6. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L - M$
7. $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L \cdot M$
8. $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$
9. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n = L^n$, $n \in I^+$
10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, $n \in I^+ - \{1\}$ และ $\sqrt[n]{L} \in R$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\lim_{x \to 5} 2x^2 - 3x + 4$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 5} 2x^2 - 3x + 4 &= \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 \\ &= 2\lim_{x \to 5} x^2 - 3\lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 \\ &= 2(5)^2 - 3(5) + 4 \\ &= 39 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \to 5} 2x^2 - 3x + 4 = 39$

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-3x}{x^2-4x}\right)$

วิธีทำ จากทฤษฎีบทข้อ 8 จะได้

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-3x}{x^2-4x}\right) = \frac{\lim_{x\to 2} 2x^2-3x}{\lim_{x\to 2} x^2-4x}$$

$$= \frac{2\lim_{x\to 2} x^2-3\lim_{x\to 2} x}{\lim_{x\to 2} x^2-4\lim_{x\to 2} x}$$

$$= \frac{2(4)-3(2)}{4-4(2)} = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-3x}{x^2-4x}\right) = -\frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\lim_{x\to 2}(x^2-1)^4$

วิธีทำ $\lim_{x\to 2}(x^2-1)^4 = \left[\lim_{x\to 2}(x^2-1)\right]^4$

$$= \left[\lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2} 1\right]^4$$

$$= [\ 2^2 - 1\ ]^4$$

$$= 81$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2}(x^2-1)^4 = 81$

ตัวอย่างที่ 6 จงหา $\lim_{x\to -3}(x^2-x)(2x-5)$

วิธีทำ $\lim_{x\to -3}(x^2-x)(2x-5) = \lim_{x\to -3}(x^2-x)\cdot\lim_{x\to -3}(2x-5)$

$$= \left(\lim_{x\to -3} x^2 - \lim_{x\to -3} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to -3} 2x - \lim_{x\to -3} 5\right)$$

$$= \left((-3)^2-(-3)\right)\left(2\lim_{x\to -3} x - 5\right)$$

$$= (9+3)[(2\times 3)-5]$$

$$= 12(-11)$$

$$= -132$$

อาศัยทฤษฎีบท 1 ข้อ 5 และข้อ 6 จะได้ผลตามทฤษฎีบท ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2 ถ้า p(x) เป็นฟังก์ชันพหุนามแล้ว สำหรับจำนวนจริง a ใดๆ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $p(x) = x^2 - 5x + 7$ แล้ว

$$\lim_{x\to 2} p(x) = 2^2 - 5(2) + 7 = 1$$

จากทฤษฎีบท 2 จะเห็นว่า ในการหาลิมิตของฟังก์ชันพหุนาม เมื่อ x เข้าใกล้ a นั้น สามารถหาลิมิตได้ โดยการแทนค่า x ในฟังก์ชันพหุนามด้วย a

อาศัยทฤษฎีบท 1 ข้อ 8 และทฤษฎีบท 2 จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันตรรกยะ โดยที่ $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ p(x) และ q(x) เป็นฟังก์ชันพหุนาม แล้ว

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{p(a)}{q(a)}$$ สำหรับจำนวนจริง a ใดๆ ที่ q(a) ≠0

ตัวอย่างที่ 7 จงหา $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$ เมื่อ $x \neq 1$

$= \frac{1}{x+1}$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 8 จงหา $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3}$ เมื่อ $x \neq 0$

$= \frac{(x^2+9)-9}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3} = \frac{1}{6}$

ในการหาลิมิตของฟังก์ชันบางฟังก์ชัน อาจหาลิมิตได้ โดยการหาลิมิตซ้ายและลิมิตขวาของฟังก์ชัน และใช้เกณฑ์การตรวจสอบ ดังนี้

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to a^+} f(x) = L = \lim_{x\to a^-} f(x)$

ตัวอย่างที่ 9 กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{เมื่อ } x<2 \\ x^2-4x+6 & \text{เมื่อ } x\geq 2 \end{cases}$$

จงหา (1) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ (2) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ (3) $\lim_{x\to 2} f(x)$

วิธีทำ (1) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

เนื่องจาก $x<2$ ดังนั้น $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x-1) = 2-1 = 1$

(2) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

เนื่องจาก $x>2$ ดังนั้น $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^2-4x+6) = (2)^2-4(2)+6 = 2$

(3) เนื่องจาก $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

สรุปเกี่ยวกับการหา ลิมิตของฟังก์ชัน

''ลิมิตของฟังก์ชัน'' จะใช้สัญลักษณ์คล้ายๆกับ ''ลิมิตของลำดับ'' ต่างกันที่ในเรื่องนี้จะใช้ $x \to a$ แทนที่จะเป็น $n \to \infty$ และในเรื่องนี้ x จะเป็นจำนวนจริงอะไรก็ได้ ไม่ต้องเป็นจำนวนเต็มบวกเหมือน n ในเรื่องลำดับอนันต์ **จะเห็นว่าวิธีหา $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ แบบง่ายๆก็คือ ให้แทน x = a ลงไปนั่นเอง**

เช่น $\lim\limits_{x \to 1} 2x - 7 = (2 \times 1) - 7 = -5$

$$\lim_{x \to -3} x^2 - 2x + 3 = (-3)^2 - 2(-3) + 3 = 9 + 6 + 3 = 18$$

$$\lim_{x \to -1} 2^x + 3 = 2^{-1} + 3 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

เวลาที่เราหา $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ เราจะลองแทน x = a ก่อนเป็นอันดับแรกดังตัวอย่างข้างบน แต่ก็อาจจะมีบางกรณีที่เราไม่สามารถคำนวณ $f(a)$ได้ ซึ่งได้แก่กรณีที่เกิด<u>การหารด้วยศูนย์ขึ้น</u> ในกรณีนี้ จะมีวิธีตอบค่าลิมิตดังต่อไปนี้

1. **ถ้าตัวตั้งไม่เป็นศูนย์ แต่ตัวหารเป็นศูนย์ ตอบได้ทันทีว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้**

   เช่น $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{x}$ = หาค่าไม่ได้ $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x}{1+x}$ = หาค่าไม่ได้

   $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+2}{x-1}$ = หาค่าไม่ได้ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-1}{x^2 - x - 2}$ = หาค่าไม่ได้

2. **ถ้าตัวตั้งเป็นศูนย์ แต่ตัวหารไม่เป็นศูนย์ ตอบได้ทันทีว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$**

   เช่น $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2 + x + 2} = \dfrac{0}{5} = 0$

3. **ถ้าตัวตั้งเป็นศูนย์ และตัวหารก็เป็นศุนย์ด้วย ต้องเปลี่ยนรูป $f(x)$ ใหม่ก่อน**

   เป้าหมายของการเปลี่ยนรูป $f(x)$คือ เพื่อให้เกิดการตัดกันของ x – a จากนั้นค่อยลองแทน a ลงไปใหม่ การเปลี่ยนรูป $f(x)$จะใช้การ<u>แยกตัวประกอบ</u> หรือไม่ก็ใช้<u>คอนจูเกต</u>คูณ

> คอนจูเกต หรือ สังยุค คือเทอมที่ตัวหน้ากับตัวหลังเหมือนเดิม แต่เปลี่ยนเครื่องหมายตรงกลางเป็นตรงข้าม เช่น คอนจูเกตของ $\sqrt{x} + 2$ คือ $\sqrt{x} - 2$
>
> เวลาเอาคอนจูเกตเข้าไปคูณ จะทำให้เข้าสูตร
>
> (น + ล)(น – ล) ช น^2 - ล^{2}ได้เสมอ

แบบฝึกหัด เรื่องลิมิตของฟังก์ชัน (1)

1. จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยอาศัยการหาค่าของฟังก์ชันเติมในตารางที่กำหนดให้ สำหรับโจทย์ในข้อ (4) ข้อ (5) และข้อ (6) อนุญาตให้นักเรียนใช้เครื่องคิดเลขช่วยในการคิดคำนวณได้

(1) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

x	3.9	3.99	3.999
f(x)			

x	4.001	4.01	4.1
f(x)			

(2) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2+x-6}$

x	1.9	1.99	1.999
f(x)			

x	2.001	2.01	2.1
f(x)			

(3) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

x	0.9	0.99	0.999
f(x)			

x	1.001	1.01	1.1
f(x)			

(4) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{e^x-1}{x}$

x	−0.1	−0.01	−0.001
f(x)			

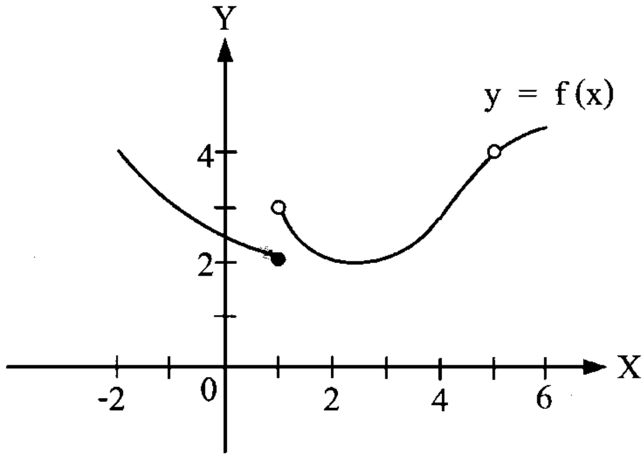
x	0.001	0.01	0.1
f(x)			

(5) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin x}{x}$

x	1	0.5	0.1	0.05	0.01
f(x)					

x	-1	-0.5	-0.1	-0.05	-0.01
f(x)					

2. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน y = f(x) ให้ดังแสดงในรูป



จงหา

(1) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ =

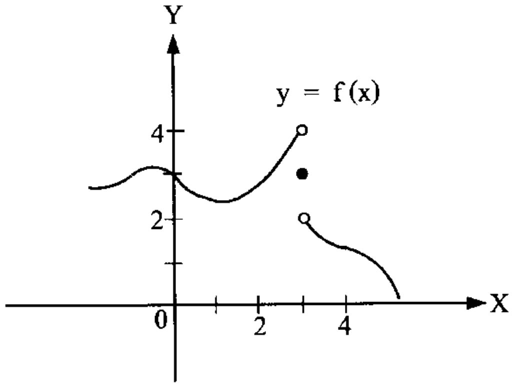
(2) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ =

(3) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ =

(4) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ =

(5) f(5) =

3. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน y = f(x) ให้ดังแสดงในรูป



จงหา

(1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ =

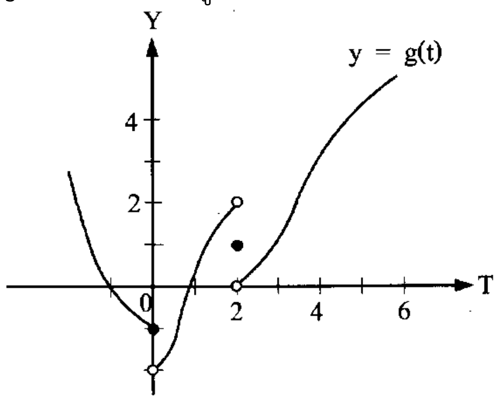
(2) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ =

(3) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ =

(4) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ =

(5) f(3) =

4. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน y = g(t) ให้ดังแสดงในรูป



จงหา (1) $\lim\limits_{t\to 0^-} g(t)$ =

(2) $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t)$ =

(3) $\lim\limits_{t\to 0} g(t)$ =

(4) $\lim\limits_{t\to 2^-} g(t)$ =

(5) $\lim\limits_{t\to 2^+} g(t)$ =

(6) $\lim\limits_{t\to 2} g(t)$ =

(7) g(2) =

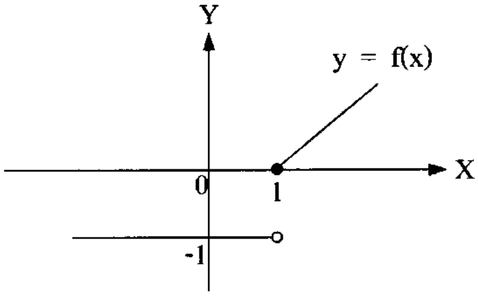
(8) $\lim\limits_{t\to 4} g(t)$

5. จากกราฟของฟังก์ชัน y = f(x) ที่กำหนดให้ จงหา

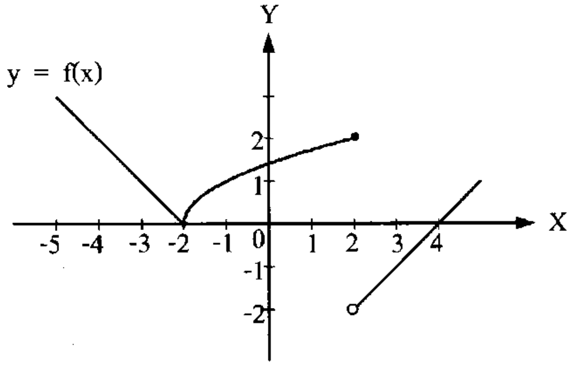
(1) $\lim_{x \to 1^-} f(x) =$

(2) $\lim_{x \to 1^+} f(x) =$

(3) $\lim_{x \to 1} f(x) =$



6. จากกราฟของฟังก์ชัน y = f(x) ที่กำหนดให้ จงหา



(1) $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$

(2) $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$

(3) $\lim_{x \to 2} f(x) =$

(4) $\lim_{x \to -2^-} f(x) =$

(5) $\lim_{x \to -2^+} f(x) =$

(6) $\lim_{x \to -2} f(x) =$

7. โดยอาศัยการเขียนกราฟของฟังก์ชัน จงหา

(1) $\lim_{x \to 4^-} (1+x)$

(2) $\lim_{x \to 2} f(x)$ เมื่อกำหนด $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \le 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$

แบบฝึกหัด เรื่องลิมิตของฟังก์ชัน (2)

1. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตหาค่าได้

(1) $\lim\limits_{x \to 0} (3x^2 + 7x - 12)$

(2) $\lim\limits_{x \to -1} (x^5 - 2x)$

(3) $\lim\limits_{x \to 5} (x^5)(x - 2)$

(4) $\lim\limits_{x \to -1} (x + 3)(x^2 + 2)$

(5) $\lim\limits_{x \to 3} \left[\dfrac{x+1}{2x-5}\right]$

(6) $\lim\limits_{x \to -5} \left[\dfrac{x^2-25}{x+5}\right]$

(7) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{x+1}{x^2-x-2}\right]$

(8) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{x^2-x-2}{x^2+4x+3}\right]$

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right]$

(10) $\lim\limits_{x\to 9}\left[\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}\right]$

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}\right]$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

2. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตหาค่าได้

(1) $\lim\limits_{x\to -4^-}\frac{|x+4|}{x+4}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1.5}\frac{2x^2-3x}{|2x-3|}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right]$

(4) $\lim\limits_{x\to -4}|x+4|$

(5) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

(6) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right]$

3. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{เมื่อ } x < 2 \\ x^2 - 4x + 6 & \text{เมื่อ } x \geq 2 \end{cases}$$

จงหา

(1) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

(2) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

(3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

4. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x < 0 \\ x^2 & \text{เมื่อ } 0 < x \leq 2 \\ 8 - x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$$

จงหา

(1) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

(2) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

(4) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

(5) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

(6) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

ใบความรู้ที่ 2
เรื่อง ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันต่อเนื่อง นิยามดังนี้

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วงเปิด (a,b) และ c $\in$(a,b) จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = c เมื่อฟังก์ชัน f มีสมบัติ ดังนี้

1. f(c) หาค่าได้
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ หาค่าได้ และ 3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

จากบทนิยาม ถ้าฟังก์ชัน f ขาดสมบัติข้อใดข้อหนึ่งแล้ว ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ x = a

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาว่า $f(x) = x^2 + 4$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = 2 หรือไม่

วิธีทำ การที่ f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = 2 นั้น f จะต้องมีสมบัติครบ 3 ข้อตามนิยาม

จาก $f(x) = x^2 + 4$

1. $f(2) = 2^2 + 4 = 8$

แสดงค่า หาค่า f(2) ได้

2. $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 + 4$

$= 2^2 + 4$

$= 8$

แสดงว่า $\lim_{x \to 2} f(x)$ หาค่าได้

3. จากข้อ 1 และ 2 จะได้ว่า

$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

ดังนั้น ที่จุด x = 2 ฟังก์ชัน f มีลักษณะตามสมบัติทั้ง 3 ข้อ

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด x = 2

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 3 & , x = 2 \end{cases}$ จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = 2 หรือไม่

วิธีทำ การที่ f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = 2 นั้น f จะต้องมีสมบัติครบ 3 ข้อ ตามนิยาม

จาก $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 3 & , x = 2 \end{cases}$

1) $f(2) = 3$

แสดงว่าหาค่า f(2) ได้ และมีสมบัติตามข้อ 1

2) $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2} (x+2)$

$= 4$

แสดงว่าหาค่า f(x) ได้ และมีสมบัติตามข้อ 2

3) จากข้อ 1 และข้อ 2 จะเห็นว่า $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , x \neq 2 \\ 4 & , x = 2 \end{cases}$ จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

วิธีทำ การที่ f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ นั้น f จะต้องมีสมบัติครบ 3 ข้อ ตามนิยาม

จาก $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , x \neq 2 \\ 4 & , x = 2 \end{cases}$

1) $f(2) = 4$

แสดงว่าหาค่า f(2) ได้ และมีสมบัติตามข้อ 1

2)
$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} f(x) &= \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \to 2} (x+2) \\ &= 4\end{aligned}$$

แสดงว่าหาค่า f(x) ได้ และมีสมบัติตามข้อ 2

3) จากข้อ 1 และข้อ 2 จะเห็นว่า $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

นั่นคือ f มีสมบัติครบ 3 ข้อ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$

ตัวอย่างที่ 4 จงพิจารณาว่า $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 3$ หรือไม่

วิธีทำ การที่ f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 3$ นั้น f จะต้องมีสมบัติครบ 3 ข้อตามนิยาม

จาก $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$

ดังนั้น $f(3) = \dfrac{3^2-9}{3-3} = \dfrac{0}{0}$ ซึ่งไม่มีความหมาย

แสดงว่า หาค่า f(3) ไม่ได้

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่มีลักษณะตามสมบัติข้อที่ 1

แสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 3$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 1 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ แล้ว

1. $f + g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$
2. $f - g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$
3. $f \cdot g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$
4. $\dfrac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ $g(a) \neq 0$

เราทราบมาแล้วว่า ถ้า p(x) เป็นฟังก์ชันพหุนามแล้ว สำหรับจำนวนจริง a ใดๆ จะได้ว่า

$\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$ ดังนั้น จะได้ทฤษฎีบท ดังนี้

ทฤษฎีบท 2 สำหรับจำนวนจริง a ใดๆ ฟังก์ชันพหุนาม p(x) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = a

โดยอาศัยทฤษฎีบท 1 และทฤษฎีบท 2 จะได้ข้อสรุปเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชันตรรกยะ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันตรรกยะ โดยที่ $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ p(x) และ q(x) เป็นฟังก์ชันพหุนาม แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = a เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง q(a) ≠0

ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วงเปิดและช่วงปิด

1. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a, b) เมื่อฟังก์ชัน f นั้นต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดบนช่วง (a, b)
2. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [a, b] เมื่อ
   (1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a, b)
   (2) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
   (3) $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$
3. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a, b] เมื่อ
   (1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a, b)
   (2) $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$
4. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a, b) เมื่อ
   (1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a, b)
   (2) $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(a)$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนด f(x) = $\sqrt{9 - x^2}$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [-3,3]

วิธีทำ ให้ c เป็นจุดใดๆ ในช่วง (-3,3)

จาก f(x) = $\sqrt{9 - x^2}$

จะได้ f(c) = $\sqrt{9 - c^2}$

และ $\lim_{x \to -c} f(x) = \lim_{x \to -c} \sqrt{9 - x^2}$

$= \sqrt{\lim_{x \to c}(9 - x^2)}$

$= \sqrt{9 - c^2}$

ดังนั้น $\lim_{x \to -c} f(x)$ = f(c)

สรุปว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (-3, 3)

และพบว่า $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = f(-3) = 0$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = f(3) = 0$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [-3, 3]

ตัวอย่างที่ 6 ฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{x}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(0, \infty)$ หรือไม่

วิธีทำ จาก $f(x) = \sqrt{x}$

ให้ $a \in (0, \infty)$

$f(a) = \sqrt{a}$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ทุก $x \in (0, \infty)$

แบบฝึกหัด เรื่องความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ณ จุดที่กำหนดหรือไม่

(1) $f(x) = 3x - 1$ ที่ $x = 0$

(2) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-16}$ ที่ $x = 4$

(3) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ ที่ $x = 1$

(4) $f(x) = |x|$ ที่ $x = 0$

(5) $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x+1}$ ที่ $x = -1$

2. จงหาค่า k ที่ทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty, \infty)$

(1) $f(x) = \begin{cases} 7x - 2 & \text{เมื่อ } x \leq 1 \\ kx^2 & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{เมื่อ } x \leq 2 \\ 2x + k & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$

แบบฝึกทักษะ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1.จงหาค่าลิมิตในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 2} 2x^2 - x$

2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - x}{x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{x^2 - \mathrm{x}}$

4. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^2 - 1}$

5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4}$

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{1 - x}$

7. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + x - 10}$

8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x} - 1}$

9. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+2} - 1}{\sqrt{x+5} - 2}$

10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

2. $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-3x+x^2}\right)$ มีค่าเท่าใด [PAT1/54]

3.จงหาค่าของ $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt[3]{x+8}+\sqrt[3]{x-8}}$ [PAT1/54]

4. จงหาค่า $\lim_{x\to1} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{เมื่อ } x \geq 1\\ 4x-1 & \text{เมื่อ } x < 1\end{cases}$

5. จงหาค่า $\lim_{x\to0} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases}2-x & \text{เมื่อ } x \geq 0\\ 3x+1 & \text{เมื่อ } x < 0\end{cases}$

6. จงหาค่า $\lim_{x\to2} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{2-x} & \text{เมื่อ } x \geq 2\\ 2x-3 & \text{เมื่อ } x < 2\end{cases}$

7. จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$

8. จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x^2-3x+2}$

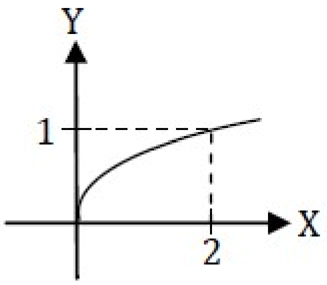
9. จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 0^-} f(1+x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \\ 2x+1 & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases}$

10. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 2x-1 & \text{เมื่อ } 0 \leq x < 1 \\ 3x & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$

ค่าของ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^2) + \lim\limits_{x\to 0^-} f(1-x)$ เท่ากับเท่าใด

11. จงเติมคำในช่องว่าง

1.



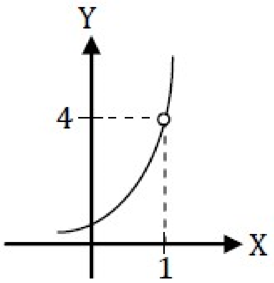
$f(2)$ =

$\lim_{x\to 2^-} f(x)$ =

$\lim_{x\to 2^+} f(x)$ =

$\lim_{x\to 2} f(x)$ =

2.



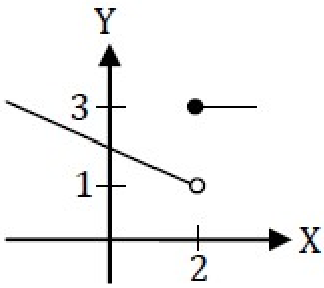
$f(1)$ =

$\lim_{x\to 1^-} f(x)$ =

$\lim_{x\to 1^+} f(x)$ =

$\lim_{x\to 1} f(x)$ =

3.



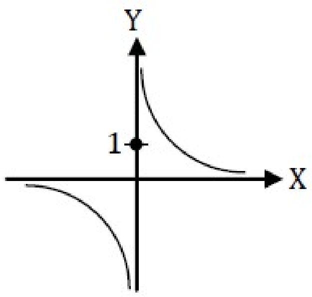
$f(2)$ =

$\lim_{x\to 2^-} f(x)$ =

$\lim_{x\to 2^+} f(x)$ =

$\lim_{x\to 2} f(x)$ =

4.



$f(0)$ =

$\lim_{x\to 0^-} f(x)$ =

$\lim_{x\to 0^+} f(x)$ =

$\lim_{x\to 0} f(x)$ =

12. กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 1$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ค่า x ต่อไปนี้หรือไม่

1. X = 0

2. X = - 1

13. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ค่า x ต่อไปนี้หรือไม่

1. x = - 1

2. x = 1

14. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } x \geq -1 \\ \dfrac{1-x^2}{x+1} & \text{เมื่อ } x < -1 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ค่า x ต่อไปนี้หรือไม่

1. x = - 1

2. x = 0

15. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ค่า x ต่อไปนี้หรือไม่

1. x = - 1

2. x = 0

16. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} k & \text{เมื่อ } x = 1 \\ \dfrac{x^2 - x}{x-1} & \text{เมื่อ } x \neq 1 \end{cases}$ จงหาค่า k ที่ทำให้ $f(x)$ ต่อเนื่องที่ x = 1

17. จงหาค่า a และ b ที่ทำให้ $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{เมื่อ } x > 1 \\ 2a - 1 & \text{เมื่อ } x = 1 \\ ax - b & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

18. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{\sqrt{2x+10} - \sqrt{x+13}} & \text{เมื่อ } x \neq 3 \\ a & \text{เมื่อ } x = 3 \end{cases}$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริง

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด x = 3 แล้ว a เท่ากับเท่าใด [PAT1 (มี.ค.54)/44]

ตารางสรุปการส่งงานของ .... ชั้น .... เลขที่ ....

ที่	งาน	กำหนดส่ง	หมายเหตุ	ตรวจโดย