โรงเรียนสตรีนนทบุรี

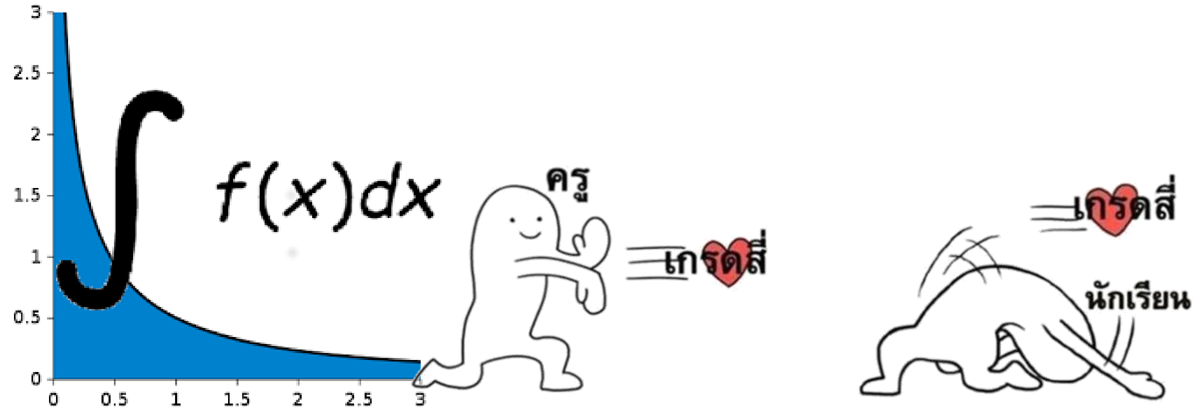
วิชาคณิตศาสตร์ (ค30205/ค33291)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา ....

เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น-การอินทิเกรต

(Basic Calculus- Integration)



ชื่อ .... ชั้น .... เลขที่ ....

ครูผู้สอน : นายพิบูลย์ ชมสมบัติ

โรงเรียนสตรีนนทบุรี 120 ถนนพิบูลสงคราม ตำบลสวนใหญ่ อำเภอเมือง จังหวัดนนทบุรี
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 3

สารบัญ

หน้า

ตารางสรุปงานของ ชื่อ... ชั้น .... เลขที่ ....

ที่	งาน	กำหนดส่ง	หมายเหตุ	ตรวจโดย

ใบความรู้
เรื่อง ปฏิยานุพันธ์

กระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ หรือ การหาฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อกำหนด $f'(x)$ มาให้ เรียกว่า การหาปฏิยานุพันธ์ โดยปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ใดๆ นิยามดังนี้

บทนิยาม ฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ f เมื่อ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของ f

การหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน มีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนด $f(x)$
2. ลองให้ $y = F(x)$
3. หา $F'(x)$
4. ทดสอบว่า $F'(x) = f(x)$ หรือไม่
   - ถ้า $F'(x) = f(x)$ แล้ว $y = F(x) + C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f
   - ถ้า $F'(x) \neq f(x)$ ให้ดำเนินการตามขั้นตอนที่ 2 ใหม่

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่า $F(x) = x^2$ เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของฟังก์ชัน $f(x) = 2x$

วิธีทำ จาก $F(x) = x^2$

$F'(x) = 2x$

ดังนั้น $F'(x) = f(x)$

ดังนั้น $F(x) = x^2$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 2x$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = x - 1$ จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f

วิธีทำ ให้ $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ จะได้ $F'(x) = x - 1$

$F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$ จะได้ $F_1'(x) = x - 1$

$F_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 7$ จะได้ $F_2'(x) = x - 1$

จะเห็นว่า F_1 , F_2 ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x - 1$

ดังนั้น $F(x)=\frac{1}{2}x^2 - x + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว เป็นรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x - 1$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาฟังก์ชัน F เมื่อกำหนด $F'(x) = 3x^2$

วิธีทำ ให้ $F(x) = x^3$

จะได้ $F'(x) = 3x^2$ ซึ่งได้สิ่งที่กำหนดให้

นั่นคือ $F(x) = x^3 + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 4 จงหาปฏิยานุพันธ์ของ f เมื่อ $f(x) = 3x^2 + x$

วิธีทำ ให้ $f(x) = 3x^2 + x$

จะหา F(x) ที่ $F'(x) = 3x^2 + x$

ลองให้ $F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2$

จะได้ $F'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}(2x)$

$= 3x^2 + x$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2 + x$ คือ $F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

หมายเหตุ : 1) ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ f แล้ว ฟังก์ชัน G ที่นิยามโดย $G(x) = F(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว จะเป็นปฏิยานุพันธ์ของ f ด้วย

2) ในคณิตศาสตร์ระดับที่สูงขึ้นไป มีการพิสูจน์โดยชัดแจ้งว่า ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันเดียวกันจะต่างกันเพียงค่าคงตัวเท่านั้น

Note :

แบบฝึกหัด

จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) $f(x) = 5x$

(2) $f(x) = x^3$

(3) $f(x) = x\sqrt{x}$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$

(5) $f(x) = 2x + 1$

(6) $f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$

(7) $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$

(8) $f(x) = (x^2 - 1)(4 - x^2)$

(9) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(10) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{x^2}$

ใบความรู้
เรื่อง ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

จากรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของ f คือ ฟังก์ชัน y = F(x) + c เมื่อ c เป็นค่าคงตัว เพื่อความสะดวกในการคำนวณ จึงมีการเขียนรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x)\,dx$ อ่านว่า "ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f" เทียบกับตัวแปร x"

นิยาม เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในโดเมนของ f ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x)\,dx$ โดยที่ $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัวใด ๆ

จากบทนิยาม เรียกกระบวนการ $\int f(x)\,dx$ ว่า "การอินทิเกรต" หรือ "การหาปริพันธ์"

เครื่องหมาย "$\int$" เรียกว่า "เครื่องหมายอินทิกรัล" หรือ "เครื่องหมายปริพันธ์"

เรียก f(x) ว่า "ตัวถูกอินทิเกรต" หรือ "ตัวถูกหาปริพันธ์"

และ dx เป็นสัญลักษณ์ที่บอกว่า "การอินทิเกรตนี้เทียบกับตัวแปร x" หรือเป็นตัวอย่างบอกให้รู้ว่าเป็น "การหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x"

สูตรเกี่ยวกับการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน

สูตรที่ 1 ถ้า f(x) = k แล้ว $\int f(x)\,dx = \int k\,dx = kx + C$
เมื่อ k และ C เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int 5\,dx$ และ $\int (-8)\,dx$

วิธีทำ $\int 5\,dx = 5x + C$

$\int (-8)\,dx = -8x + C$

สูตรที่ 2 ถ้า $f(x) = x^n$ เมื่อ $n \neq -1$

$$\int f(x)\,dx = \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int x^5\,dx$ และ $\int \frac{1}{x^3}\,dx$

วิธีทำ จากสูตรที่ 2 $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

จะได้ $\int x^5\,dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C$

$$= \frac{x^6}{6} + C$$

$$\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx$$

$$= \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C$$

$$= \frac{x^{-2}}{-2} + C$$

$$= \frac{-1}{2x^2} + C$$

สูตรที่ 3 $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว และ f(x) มีปริพันธ์

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\int 5x^2\,dx$

วิธีทำ

$$\int 5x^2\,dx = 5\int x^2\,dx$$

$$= 5\left(\frac{x^3}{3}\right) + C$$

$$= \frac{5}{3}x^3 + C$$

สูตรที่ 4 $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
เมื่อ f(x) และ g(x) มีปริพันธ์

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\int (x^2+2x)\,dx$

วิธีทำ

$$\int (x^2+2x)\,dx = \int x^2dx + \int 2xdx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 + C$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\int (x^2+3x^2+5x)\,dx$

วิธีทำ

$$\int (x^2+3x^2+5x)\,dx = \int x^4dx + \int 3x^2\,dx + \int 5x\,dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^5}{5} + x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C$$

สูตรที่ 5 $\int[f(x)-g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$ เมื่อ f(x) และ g(x) มีปริพันธ์

ตัวอย่างที่ 6 จงหา $\int\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\int\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)dx &= \int 2x\,dx - \int\frac{1}{x^2}\,dx \\ &= 2\int x\,dx - \int x^{-2}\,dx \\ &= 2\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^{-1}}{-1} + C \\ &= x^2+\frac{1}{x}+C\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7 จงหา $\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx &= \int\left(x^{-2}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx \\ &= \int x^{-2}\,dx - \int\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx \\ &= \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{2}\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\ &= -\frac{1}{x} - \sqrt{x} + C\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 8 ถ้า $\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 3x^2 - 2$ จงหา y

วิธีทำ จาก $\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 3x^2 - 2$

จะได้ y
$$\begin{aligned}&= \int(5x^4+3x^2-2)dx \\ &= \int 5x^4dx+\int 3x^2dx-\int 2dx \\ &= 5\int x^4dx+3\int x^2dx-2\int dx \\ &= \frac{5x^5}{5}+\frac{3x^3}{3}-2x+c \\ &= x^5 + x^3 - 2x + c\end{aligned}$$

โจทย์เกี่ยวกับการนำปริพันธ์ไม่จำกัดเขตไปใช้

การนำปริพันธ์ไม่จำกัดเขต สามารถนำมาประยุกต์ใช้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 9 ถ้ากำหนดความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ เป็น $3x^2 - 4x - 5$ แล้ว จงหาสมการของเส้นโค้งที่ผ่านจุด (1, -6)

วิธีทำ ให้ $y = f(x)$ เป็นสมการของเส้นโค้ง

ดังนั้น $f'(x)$ คือ ความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ

จากโจทย์ จะได้ $f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$

ใช้วิธีการหาปริพันธ์ จะได้

$$\int f'(x)\,dx = \int (3x^2 - 4x - 5)\,dx$$

$$f(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - 5x + C$$

$$= x^3 - 2x^2 - 5x + C \qquad (1)$$

แต่เส้นโค้งผ่านจุด (1, -6) จะได้ว่า $x = 1$ และ $f(x) = -6$

แทนค่า x และ f(x) ใน (1)

$$-6 = 1 - 2 - 5 + C$$

$$C = 0$$

แทนค่า C ใน (1) จะได้สมการเส้นโค้งคือ

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x$$

ตัวอย่างที่ 10 ในขณะเวลา t ใด ๆ วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง -3t เมตร/วินาที^{2} ขณะที่เริ่มต้นจับเวลาวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 1 เมตร/วินาที และได้ระยะทาง 3 เมตร จงหาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ

วิธีทำ เนื่องจาก $a = \frac{dv}{dt} = -3t$

จะได้ $v = \int -3t\,dt = -\frac{3}{2}t^2 + C_1$

แต่ขณะที่เริ่มต้นจับเวลาวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 1 เมตร/วินาที

นั่นคือ ขณะ $t = 0$, $v = 1$

จาก $v = -\frac{3}{2}t^2 + C_1$

$$1 = 0 + C_1$$

$$C_1 = 1$$

ดังนั้น ความเร็วขณะเวลา t คือ $v = -\frac{3}{2}t^2 + 1$

เนื่องจาก $v = \frac{dS}{dt} = -\frac{3}{2}t^2 + 1$

จะได้ $S = \int \left(-\frac{3}{2}t^2 + 1\right)dt = -\frac{t^3}{2} + t + C_2$

แต่ขณะเริ่มต้นจับเวลาวัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 3 เมตร

นั่นคือ ขณะ $t = 0$, $S = 3$

จาก $S = -\dfrac{t^3}{2} + t + C_2$

$3 = 0 + 0 + C_2$

$C_2 = 3$

ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ คือ $S = -\dfrac{t^3}{2} + t + 3$

ตัวอย่างที่ 11 ปล่อยวัตถุชิ้นหนึ่งให้ตกจากที่สูง โดยกฎของนิวตัน แรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ F กำหนดโดยสูตร F = ma เมื่อ m เป็นมวล a เป็นความเร่ง แต่แรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่คือ น้ำหนักของวัตถุ (w) ซึ่งเป็นแรงที่โลกดึงดูดวัตถุ โดย w = mg เมื่อ g เป็นความเร่งที่โลกดึงดูดวัตถุและใช้หน่วยของระยะทางเป็นเมตร หน่วยของเวลาเป็นวินาที g = 9.8 เมตร/วินาที^{2} จากสูตร ma = mg จงหาระยะที่ทำให้วัตถุตก (s) ในรูปของ t กำหนดให้ว่า เมื่อ t = 0 จะได้ s = 0 และ v = 0

วิธีทำ จาก $ma = mg$

จะได้ $a = g$

หรือ $\dfrac{dv}{dt} = g$

ดังนั้น $v = \int g\,dt = gt + c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

เมื่อ $t = 0$ จะได้ $v = 0$ ฉะนั้น $c_1 = 0$

ดังนั้น $v = gt$

จาก $v = \dfrac{ds}{dt}$

จะได้ $\dfrac{ds}{dt} = gt$

และ $s = \int gt\,dt = \dfrac{1}{2}gt^2 + c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

ขณะ $t = 0$ จะได้ $s = 0$ ฉะนั้น $c_2 = 0$

ดังนั้น $s = \dfrac{1}{2}gt^2 = \dfrac{1}{2}(9.8)t^2 = 4.9t^2$

นั่นคือ ระยะที่วัตถุตก คือ $s = 4.9t^2$

แบบฝึกหัด

1. จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

(1) $\int(x^4 + 3x^2 + 5x)dx$

(2) $\int(2x^3 - 3x^2 + 6 - 2x^{-2})dx$

(3) $\int(x^{10} - \frac{1}{x^3})dx$

(4) $\int(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4})dx$

(5) $\int\sqrt{x}\,dx$

(6) $\int(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{2}{3}})dx$

(7) $\int(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{2\sqrt{x}})dx$

(8) $\int x^2(x - 3)dx$

(9) $\int\sqrt{x}(x+1)dx$

(10) $\int\left(\frac{x-2}{x^3}\right)dx$

(11) $\int(x^2 + 5x + 1)dx$

(12) $\int(6\sqrt{x} + 15)dx$

(13) $\int(x^3 + 5x^2 + 6)dx$

(14) $\int(\frac{6}{\sqrt{x}} + 8\sqrt{x})dx$

2. ถ้า $f'(x) = x$ และ $f(2) = 2$ แล้ว จงหา $f(x)$

3. จงหาสมการเส้นโค้ง $y = f(x)$ เมื่อกำหนดความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ และจุดที่เส้นโค้งผ่านดังนี้

(1) $\frac{dy}{dx} = x^2 - 3x + 2$, ที่จุด $(2, 1)$

(2) $\frac{dy}{dx} = 2x^3 + 4x$, ที่จุด $(0, 5)$

(3) $\frac{dy}{dx} = 6 + 3x^2 - 2x^4$, ที่จุด $(1, 0)$

4. จงหาความเร็ว $v(t)$ และตำแหน่งของวัตถุ $s(t)$ ขณะเวลา t ใด ๆ เมื่อกำหนดความเร่ง $a(t)$ และตำแหน่งของวัตถุเมื่อ $t = 0$ ดังนี้

(1) $a(t) = 6 - 2t, \quad 0 \leq t \leq 3, \quad v(0) = 5, \quad s(0) = 0$

(2) $a(t) = 120t - 12t^2, \quad 0 \leq t \leq 10, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = 4$

(3) $a(t) = t^2 + 5t + 4, \quad 0 \leq t \leq 15, \quad v(0) = -2, \quad s(0) = -3$

5. โยนวัตถุชิ้นหนึ่งขึ้นไปบนอากาศในแนวดิ่งด้วยความเร็ว 98 เมตร/วินาที กำหนดให้ $g = 9.8$ เมตร/วินาที^{2} จงหา

(1) สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นนี้

(2) วัตถุขึ้นไปสูงสุดเมื่อเวลาผ่านไปนานเท่าใด

(3) ระยะทางสูงสุดที่วัตถุขึ้นไปได้

(4) ต้องใช้เวลาเท่าใดวัตถุจึงอยู่สูง 249.9 เมตรจากจุดเริ่มต้น

6. ในขณะเวลา t ใด ๆ รถไฟขบวนหนึ่งแล่นออกจากสถานีด้วยความเร่ง $\frac{1}{4}(20-t)$ เมตร/วินาที^{2} จนวินาทีที่ 20 หลังจากนั้นรถไฟแล่นต่อไปด้วยความเร็วเท่าเดิมโดยตลอด จงหาว่าหลังวินาทีที่ 20 รถไฟแล่นด้วยความเร็วเท่าใดและเมื่อเวลาผ่านไป 30 วินาที รถไฟจะอยู่ห่างสถานีต้นทางเป็นระยะทางเท่าใด

Note :

ใบความรู้

เรื่อง ปริพันธ์จำกัดเขต

ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b]$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)\,dx$ ซึ่งในการคำนวณปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ บนช่วง $[a, b]$ นั้น จะใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ในการคำนวณจะทำให้หาปริพันธ์จำกัดเขตได้รวดเร็วยิ่งขึ้น และสามารถนำไปใช้ในการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งอีกด้วย

ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ถ้า F เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[a, b]$ โดยที่ $F'(x) = f(x)$ แล้ว $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

จากทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส เราจะเขียนสัญลักษณ์

$F(x)\big|_a^b$ แทน $F(b) - F(a)$

ถ้า $F'(x) = f(x)$ ดังนั้น $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$

วิธีการหาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x)\,dx$ โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ทำได้ดังนี้

1. หา $F(x)$ โดยการนำ $f(x)$ ไปหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต แต่ไม่ต้องมาบวกค่าคงตัว

   $\int f(x)\,dx = F(x)$

   หรือ $F'(x) = f(x)$

2. เมื่อได้ $F(x)$ จากข้อ 1 แล้วให้นำค่า a และ b ไปแทนในฟังก์ชัน $F(x)$ และคำนวณค่า $F(b) - F(a)$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int_0^1 x^2\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใน $\mathbb{R}$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f จึงเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $[0, 1]$

และเนื่องจากปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^2$ คือ $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$

$$\text{จะได้} \quad \int_0^1 x^2\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} + C\right) - (0 + C)$$

$$= \frac{1}{3}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$

วิธีทำ $\int (4 - x^2)dx = 4x - \frac{x^3}{3} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ $f(x) = 4 - x^2$ คือ $F(x) = 4x - \frac{x^3}{3} + c$

ฉะนั้น $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2$

$= \left(4(2) - \frac{2^3}{3}\right)\Big|_0^2 - 0$

$= \frac{16}{3}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\int_{-1}^2 (3x^2 - 2x)\,dx$

วิธีทำ วิธีที่ 1 ให้ $f(x) = 3x^2 - 2x$

จะได้ $\int f(x)\,dx = \int_{-1}^2 (3x^2 - 2x)\,dx$

$= \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}$

$= x^3 - x^2$

นั่นคือ $F(x) = x^3 - x^2$

จากโจทย์ $a = -1$ และ $b = 2$

หา $F(b) = F(2)$

$= 2^3 - 2^2 = 4$

หา $F(a) = F(-1)$

$= (-1)^3 - (-1)^2 = -2$

ดังนั้น $F(b) - F(a) = F(2) - F(-1)$

$= 4 - (-2) = 6$

วิธีที่ 2 $\int_{-1}^2 (3x^2 - 2x)\,dx = \left(x^3 - x^2\right)\Big|_{-1}^2$

$= F(2) - F(-1)$

$= (2^3 - 2^2) - ((-1)^3 - (-1)^2)$

$= 4 - (-2)$

$= 6$

แบบฝึกหัด

จงหาปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้ โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

1. $\int_{3}^{4}(x^3+3)dx$

2. $\int_{1}^{3}(x^2-2x+3)dx$

3. $\int_{-1}^{1}(4x^3+2x)dx$

4. $\int_{-3}^{-1}\frac{1}{x^2}dx$

5. $\int_{2}^{4}(x^2+\frac{3}{x^3})dx$

6. $\int_{-1}^{1}(-x^4+x^2-1)dx$

7. $\int_{0}^{1}x(x^2+1)dx$

8. $\int_{0}^{1}x^2(x^2+1)^2dx$

9. $\int_{0}^{2}\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)dx$

10. $\int_{0}^{2}x(x^2+1)^2dx$

ใบความรู้
เรื่อง พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

การหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ สามารถหาได้โดยอาศัยทฤษฎีบทดังนี้

บทนิยาม เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ A เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f จาก $x = a$ ถึง $x = b$

(1) ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ และ A เป็นพื้นที่เหนือแกน X แล้ว $A = \int_a^b f(x)\,dx$

(2) ถ้า $f(x) \leq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ และ A เป็นพื้นที่ใต้แกน X แล้ว $A = -\int_a^b f(x)\,dx$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $f(x) = x^2 - 9$ จาก $x = -2$ ถึง $x = 1$

วิธีทำ ให้ A แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $f(x) = x^2 - 9$ จาก $x = -2$ ถึง $x = 1$

$f(x) \geq 0$ สำหรับทุก x ในช่วง $[-2, 1]$

จะได้ $A = -\int_{-2}^{1} (x^2 - 9)\,dx$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - 9x\right)\Bigg|_{-2}^{1}$$

$$= -\left[\frac{1}{3} - 9\right] - \left[-\frac{8}{3} + 18\right]$$

$= 24$ ตารางหน่วย

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 2x - 15$ จาก $x = -2$ ถึง $x = 2$.

วิธีทำ ให้ A เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 2x - 15$ จาก $x = -2$ ถึง $x = 2$.

และ $f(x) \leq 0$ สำหรับทุก x ในช่วง $[-2, 2]$

จะได้ $A = -\int_a^b f(x)\,dx$

$$= -\int_{-2}^{2} (x^2 + 2x - 15)\,dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 15x\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 15x\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= -\left\{\left[\frac{2^3}{3} + 2^2 - 15(2)\right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 - 15(-2)\right]\right\}$$

$$= -\left[\frac{16}{3} - 60\right]$$

$$= \frac{164}{3}$$ ตารางหน่วย

ตัวอย่างที่ 3 จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 4x - x^2$ จาก $x = 1$ ถึง $x = 3$

วิธีทำ ให้ A แทนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 4x - x^2$ จาก $x = 1$ ถึง $x = 3$
และ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก x ในช่วง $[1, 3]$

ดังนั้น $A = \int_1^3 (4x - x^2)\,dx$

$$= \left.\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_1^3$$

$$= \left.2x^2 - \frac{x^3}{3}\right|_1^3$$

$$= \left[2(3)^2 - \frac{3^3}{3}\right] - \left[2(1)^2 - \frac{1^3}{3}\right]$$

$$= (18 - 9) - \left(2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 9 - \frac{5}{3}$$

$$= \frac{22}{3}$$ ตารางหน่วย

แบบฝึกหัด พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

1. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = x^2$ จาก $x = -3$ ถึง $x = 0$

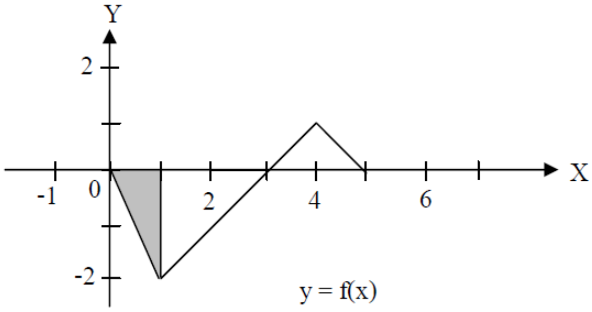
2. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = x + 1$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 1$

3. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = 6 + x - x^2$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 1$

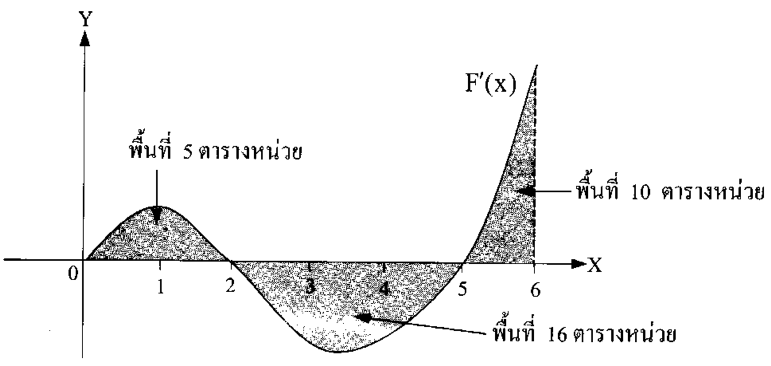
4. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = 9 - x^2$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 3$

5. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = x^2 - 9$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 3$

6. กำหนดให้ ฟังก์ชัน f แสดงดังรูป ถ้า $F'(x) = f(x)$ และ $F(0) = 0$ แล้ว
จงหา $F(b)$ เมื่อ $b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$



7. กำหนดให้ ฟังก์ชัน $F'(x)$ แสดงดังรูป ถ้า $F(0) = 3$ จงหาค่าของ $F(2)$, $F(5)$ และ $F(6)$



แบบฝึกหัดเสริม 1

1. ให้หาค่า F (x) ที่ทำให้ F'(x) = f (x) เมื่อกำหนดให้

1.1 $f(x) = 2x$

1.2 $f(x) = 7$

1.3 $f(x) = 3x^2$

1.4 $f(x) = x^3$

1.5 $f(x) = x\sqrt{x}$

1.6 $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$

2. ให้หาค่า $\int f(x)dx$ เมื่อกำหนดให้

2.1 $f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 2$

2.2 $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$

2.3 $f(x) = x^2(x-3)$

2.4 $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{x^3} + 4$

2.5 $f(x) = \dfrac{x-2}{x^3}$

2.6 $f(x) = (4x^2 + 1)(x - 1)$

3. $f(x) = 3x^2 - 3$ และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f หาก F(0) = 4 แล้ว ให้หาค่า F(1)

4. ถ้า $\dfrac{dy}{dx} = 5x^4 + 3x^2 - 4x$ และ -y(1) = y(-1) แล้ว ให้หาค่าของ y(0)

5. โค้ง C มีความชันที่จุดใด ๆ เป็น $x^2 + 2x - 3$ ให้หาสมการของโค้งนั้น ถ้าโค้งผ่านจุด (0, 1)

6. ถ้าเส้นโค้ง y = f (x) ผ่านจุด (0, 1) และ (4, c) เมื่อ c เป็นจำนวนจริง และความชันของเส้นโค้งนี้ที่จุด (x, y) ใดๆ มีค่าเท่ากับ $\sqrt{x}-1$ แล้ว c มีค่าเท่าใด

7. ถ้าเส้นโค้ง y = f (x) มีอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันที่จุด (x, y) ใดๆ บนโค้งเป็น 2x- 1 และเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (1, 2) ตั้งฉากกับเส้นตรง x + 2y – 1 = 0 แล้วความชันของโค้งนี้ที่จุดซึ่ง x = 0 เท่ากับเท่าใด

8. จุดตัดระหว่างวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 1) รัศมี $\sqrt{2}$ หน่วย กับเส้นโค้งที่ผ่านจุด (3, 10) และมีความชันที่จุด (x, y) ใด ๆ เป็น 2x จะอยู่ในจตุภาคใด

9. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง f(2) = -1, f'(1) = -3 และ f''(x) = 3 ทุกๆ ค่า x แล้ว f(0) มีค่าเท่าใด

10. ในเวลา t วินาที รถไฟวิ่งด้วยความเร่ง a ฟุตต่อวินาที^{2} โดย $a = 12t^2 + 6t + 10$ หากเมื่อเวลาเริ่มต้นพบว่าระยะทางเป็น 10 ฟุต และความเร็วเป็นศูนย์ ให้หาระยะทางเมื่อเวลาผ่านไป 5 วินาที

11. ถ้าวัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ เป็น $24t^2$ เมตร/วินาที^{2} และขณะเวลาเป็น t = 1 วินาที มีความเร็ว 16 เมตร/วินาที และเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 8 เมตร แล้ว เมื่อเวลา t = 2 วินาที วัตถุจะเคลื่อนที่ได้ระยะทางเท่าไร

12. ถ้ากำลังคนของบริษัทแห่งหนึ่งที่มีในปัจจุบันทำให้ได้ผลผลิต 3,000 ชิ้นต่อวัน และเมื่อคนเพิ่ม x คน จะมีอัตราการเปลี่ยนแปลงผลผลิต $80-6\sqrt{x}$ ชิ้นต่อวัน ถามว่าเมื่อเพิ่มคน 25 คน บริษัทแห่งนี้จะได้ผลผลิตกี่ชิ้นต่อวัน

แบบฝึกหัดเสริมทักษะ 2

1. ให้หาค่าของ

1.1 $\int_{0}^{4}(3-x)dx$

1.2 $\int_{-2}^{2}(2x-1)dx$

1.3 พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง y = 3 – x กับแกน x ในช่วง x = 0 ถึง 4

1.4 พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง y = 2x – 1 กับแกน x ในช่วง x = -2 ถึง 2

2. ให้หาค่าของ

2.1 $\int_{-1}^{2}(3x^2-2x)dx$

2.2 $\int_{-1}^{3}(x^3-4x)dx$

2.3 $\int_{-1}^{4}(6+x-x^2)dx$

3. ให้หาพื้นที่ที่ล้อมด้วยโค้ง $f(x) = x^2 - 1$ กับแกน x ในช่วงที่กำหนดให้ต่อไปนี้

3.1 ในช่วง $x = 1$ ถึง 2

3.2 ในช่วง $x = -1$ ถึง 1

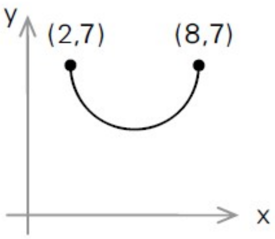
3.2 ในช่วง $x = -2$ ถึง 0

4. ค่าของ $\int_1^2 \left(\frac{x^4+1}{x^2}\right)dx + \int_0^1 (4-\sqrt{x})^2\ dx$ เท่ากับเท่าใด

5. พื้นที่ปิดล้อมด้วยโค้ง $y = x^2 - 3x + 2$ จาก 0 ถึง $x = 2$ เฉพาะส่วนที่อยู่เหนือแกน x เท่ากับเท่าใด

6. ให้ $f(x) = x^2 - c$ โดย c เป็นค่าคงตัวซึ่ง $c \geqslant 4$ ถ้าพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยโค้ง y=f(x) จาก x = -2 ถึง x = 1 เท่ากับ 24 ตารางหน่วย แล้ว c มีค่าเท่าใด

7. กำหนดให้ f(x) มีกราฟเป็นครึ่งวงกลมดังกราฟให้หาค่า $\int_{5}^{8} f(x)dx$



8. กำหนดฟังก์ชัน y = f(x) มีกราฟเป็นเส้นตรงตัดแกน x ที่จุด (-1, 0) และผ่านจุด (3, 6) แล้ว ค่าของ $\int_{-1}^{3} f(x)dx$

สูตรเกี่ยวกับการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + C$$

$$\int \sin u\,du = -\cos u + C$$

$$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$$

$$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$$

$$\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$$

$$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$$

$$\int u^n du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\int du = u + C$$

$$\int \cos u\,du = \sin u + C$$

$$\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$$

$$\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$$

$$\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$$

$$\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$$

$$\int kf(u)\,du = k\int f(u)\,du$$

Note :